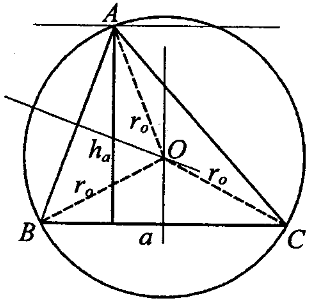
OŠ Mrčajevci 2009.

РЕШЕЊА – VI РАЗРЕД

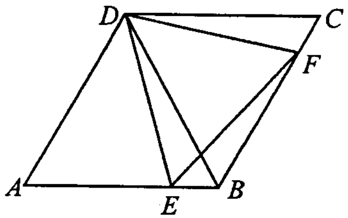
1. Растављања броја 2009 су $2009 = 49 \cdot 41 = 7 \cdot 287 = 1 \cdot 2009$. Како ни један од бројева 7 и 287 није квадрат неког целог броја, добијамо да је $x^2 = 49$ и $|y| = 41$ или $x^2 = 1$ и $|y| = 2009$ (**4 бода**). Дакле, сва решења су (**свако решење по 2 бода**):
$(x,y) \in \{(7,41),(7,-41),(-7,41),(-7,-41),(1,2009),(1,-2009),(-1,2009),(-1,-2009)\}$.

2. Нека је O центар описане кружнице. Троугао BCO је једнакокраки и познате су нам све његове странице па га можемо конструисати. Тачка A се налази на правој која је паралелна правој на којој је страница a и на растојању h_a од ње и налази се на удаљености r_o од тачке O. Теме А је одређено пресеком поменуте праве и кружнице (**За објашњење и конструкцију дати по 10 бодова. Не тражити доказ и дискусију**).



3. (**МЛ, XLI-5**) Ако је x мушкараца у браку, онда је и x жена у браку, па острву живи $\frac{4x}{3}$ мушкараца и $\frac{3x}{2}$ жена (**5 бодова**). Острво има укупно $\frac{17x}{6}$ становника (**5 бодова**). У браку је $2x$ становника, а $\frac{5x}{6}$ становника није (**5 бодова**), а то је $\frac{5}{17}$ становника (**5 бодова**).

4. Како је $\measuredangle BAD=60°$ и $AB=AD$ то је ΔADB једнакостраничан и $\measuredangle ADB=60°$ (**3 бода**). Аналогно је и $\measuredangle DBC=60°$ (**3 бода**). Сада је $\Delta ADE \cong \Delta BDF$ ($AD=BD$, $AE=BF$, $\measuredangle DAB=\measuredangle DBC$) па је $DE=DF$ и $\measuredangle ADE=\measuredangle BDF$ (**7 бодова**). Како је $DE=DF$ и $\measuredangle EDF=\measuredangle EDB+\measuredangle BDF=\measuredangle EDB+\measuredangle ADE=\measuredangle ADB=60°$, то је троугао DEF једнакостраничан (**7 бодова**).



5. Да би збир 3 броја био паран сва три морају бити парна или један паран, а два непарна. У сваком случају један од ова 3 броја је паран (**6 бодова**). Збир преостала 2 броја је непаран, а то је могуће само ако је 1 паран, а 1 непаран. Дакле, и од преостала 2 броја један је сигурно паран (**7 бодова**). Како су сада 2 броја сигурно парна, а сваки паран број је дељив са 2, то је производ ових 5 бројева дељив са 4 (**7 бодова**).

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
05.04.2009.

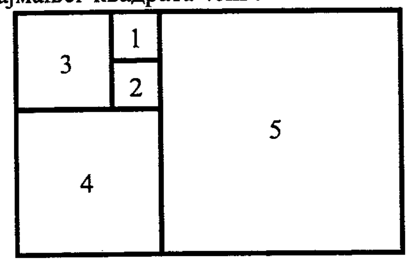
IV РАЗРЕД

1. Допиши један пар заграда тако да буде тачна једнакост
$$6027 \cdot 287 - 2009 : 7 = 0.$$

2. Дешифруј сабирање
```
   ***
+ ****
  2009
```
ако се оба сабирка читају исто и са леве и са десне стране (такви бројеви су, на пример: 373, 4224, 5555).

3. Маја је у башти на цвећу видела бубамаре са 4 и са 7 тачкица. Колико је најмање бубамара са 7 тачкица могло да буде ако је Маја избројала укупно 90 тачкица?

4. На слици су са бројевима од 1 до 5 означени квадрати који формирају правоугаоник (види слику). Израчунај обим правоугаоника ако је површина најмањег квадрата $4cm^2$.



5. Две ивице квадра су дужина 5cm и 10cm. Збир дужина свих ивица квадра је 140cm. Израчунај површину тог квадра.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

OŠ Mrčajevci 2009.

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

05.04.2009.

V РАЗРЕД

1. Дешифруј одузимање

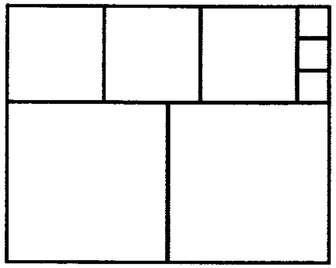
$$\begin{array}{r} **** \\ -\ \ *** \\ \hline 2009 \end{array}$$

ако се и умањеник и умањилац читају исто и са леве и са десне стране (такви бројеви су, на пример: 989, 3883, 9999).

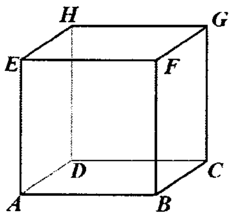
2. Уместо звездица стави знаке рачунских операција тако да добијеш тачну једнакост (можеш користити и заграде)

$$\frac{1}{2} \;*\; \frac{1}{6} \;*\; \frac{1}{6027} = 2009.$$

3. Правоугаоник је подељен на 8 квадрата. Израчунај површину правоугаоника ако је обим најмањег квадрата 2cm.



4. Маја је означила врхове коцке словима, као што је приказано на слици. Затим је словима дала вредности тако да збир четири броја на свакој страни коцке (у теменима сваког квадрата) буде једнак. Мајина сестра је избрисала неке бројеве, па тренутно знамо, да:



$$A = 1,\ C = \frac{1}{3},\ F = \frac{1}{2},\ G = 1,\quad H = \frac{1}{4}.$$

Одреди вредности слова B, D и E.

5. У 6 сати казаљке сата образују опружен угао. За колико минута ће казаљке први пут образовати угао од 70°?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

05.04.2009.

VI РАЗРЕД

1. Одреди све парове целих бројева x и y за које важи:

$$x^2 \cdot |y| = 2009.$$

2. Конструиши троугао ABC ако је позната страница BC (a), висина која одговара страници BC (h_a) и полупречник описане кружнице око троугла ABC (r_o).

3. На једном острву $\frac{3}{4}$ мушкараца су ожењени, а $\frac{2}{3}$ жена су удате. Који део становништва острва није у браку, ако је број ожењених мушкараца једнак броју удатих жена?

4. На страницама AB и BC ромба $ABCD$ изабране су тачке E и F тако да је $AE = BF$. Угао BAD тог ромба је 60°. Докажи да је троугао DEF једнакостраничан.

5. Дато је 5 природних бројева a, b, c, d и e, чији је збир 2009. Збир нека 3 од њих је 1000. Докажи да је $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$ дељиво са 4.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

OŠ Mrčajevci 2009.

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
05.04.2009.

VII РАЗРЕД

1. Докажи да је број $4^9 + 6^{10} + 3^{20}$ квадрат неког природног броја.

2. Израчунај површину правоуглог троугла чији је обим 36cm, ако за странице тог троугла важи $\frac{a+b}{c} = \frac{7}{5}$ (a и b су катете, c хипотенуза).

3. Нека је $m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n + 57$. Одреди све природне бројеве n за које је број m квадрат неког природног броја.

4. Од квадрата су одрезана 4 правоугла троугла тако да је добијен правилан осмоугао. Израчунај површину тог осмоугла ако је страница квадрата 10cm.

5. Колико има троцифрених бројева у којима ниједна цифра није нула, а производ цифара је дељив са 15?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
05.04.2009.

VIII РАЗРЕД

1. Докажи да ребус

$$\begin{array}{r} A \\ AB \\ ABC \\ \underline{+ABCD} \\ 2\,0\,0\,9 \end{array}$$

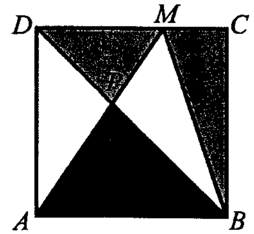
нема решење ако различитим словима одговарају различите, а истим словима исте цифре.

2. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Са S је означен центар те коцке. Израчунај запремину пирамиде A_1BC_1S.

3. Ако за природне бројеве a, b и c важи $a + b + c = 2010$, докажи да је $a^3 + b^3 + c^3$ дељиво са 6.

4. Колико има троцифрених бројева у којима ниједна цифра није нула, а производ цифара је дељив са 20?

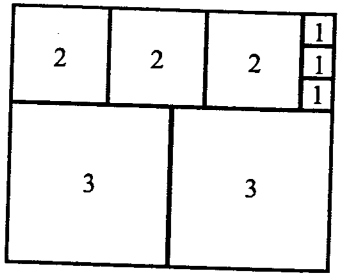
5. Дат је квадрат $ABCD$. Нека је M произвољна тачка на страници CD и пресек дужи AM и BD је тачка P (види слику). Шта је веће: површина троугла ABP или збир површина троуглова MDP и BCM?



Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА – V РАЗРЕД

1. Прва и последња цифра умањеника може бити 3 или 2 да би разлика била 2009. Ако је 3 онда последња, а самим тим и прва, цифра умањиоца мора бити 4. Међутим, тада разлика не може бити 2009. Дакле, умањеник почиње и завршава се са цифром 2, тј.
   2**2 – ***=2009 (**5 бодова**).
   Сада прва и последња цифра умањиоца морају бити 3 (**5 бодова**). Да би разлика неког броја и броја 3 била 0, тај број мора бити 3 или 4 (због претходног одузимања). Ако је умањилац 2442 умањилац је тада 433 што није тражено решење. Ако је умањилац 2332 умањилац је тада 323 што јесте тражено решење. Дакле, решење је $2332 - 323 = 2009$ (**10 бодова**).
2. $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right):\frac{1}{6027}=2009$ (**20 бодова**).
3. Обим квадрата 1 је 2cm, па је његова страница је 0,5cm (**5 бодова**). Страница квадрата 2 је три пута већа од странице квадрата 1 па је 1,5cm (**5 бодова**). Две странице квадрата 3 имају исту дужину као збир три странице квадрата 2 и једна страница квадрата 1, па је она 2,5cm (**5 бодова**). Дакле, дужина правоугаоника је 5cm, а ширина 4cm. Сада је можемо израчунати да је површина правоугаоника 20cm^2 (**5 бодова**).



4. (**МЛ, XLIII-4**) Збир бројева B, C, F и G је једнака са збиром бројева E, F, G и H. Означимо број B са x. Слово E ће имати вредност $x+\frac{1}{12}$ (**4 бода**). Слично одређујемо и вредност слова D. Разлика збира бројева B, C, F, G и C, D, G, H је $\frac{1}{2}$, па слово $D=x+\frac{1}{4}$ (**4 бо-да**). Знамо да збир бројева A, B, C и D је једнака са збиром бројева E, F, G и H $x+\frac{1}{3}+1+x+\frac{1}{4}=x+\frac{1}{12}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. Из једначине добијамо $x=\frac{1}{4}$ (**4 бода**). На крају $B=\frac{1}{4}, D=\frac{1}{2}, E=\frac{1}{3}$ (**8 бодова**).
5. Велика казаљка за 1 минут опише угао од 6°, мала 0,5° (**5 бодова**). Дакле, сваког минута угао између мале и велике казаљке се смањи за 5,5° (**5 бодова**). Ако са x означимо број тражених минута, треба да решимо једначину $180° - 5{,}5°x = 70°$ (**5 бодова**). Решење једначине је $x = 20$, па је тражено решење 20 минута (**5 бодова**).

РЕШЕЊА – IV РАЗРЕД

1. (**МЛ, XLIII-5**) $6027\cdot(287-2009:7)=0$ (**20 бодова**).

2. Прва цифра четвороцифреног броја мора бити 1, да би збир био 2009, па је и последња цифра 1 (**5 бодова**). Последња цифра троцифреног броја мора бити 8, а самим тим и прва (**5 бодова**). Како се збир броја 8 и неког броја завршава на 0, тај број мора бити 2 или 1 (ако постоји пренос при претходном сабирању). Дакле, могући четвороцифрени бројеви су 1221 или 1111 (**5 бодова**). Ако је четвороцифрени број 1221, тада је 2009–1221=788, а ово не може бити тражени троцифрени број. Ако је четвороцифрени број 1111, тада је тражени троцифрени број 2009–1111=898, што јесте решење (**5 бодова**).

$$\begin{array}{r} 898 \\ +\ 1111 \\ \hline 2009 \end{array}$$

3. Ако је била једна бубамара са 7 тачкица, тада је укупан број тачкица на бубамарама са 4 тачкице 83, што је немогуће. Ако је било две бубамаре са 7 тачкица тада је укупан број тачкица на бубамарама са 4 тачкице 76 што је могуће. Најмање је могло да буде две бубамаре са 7 тачкица (**20 бодова**).

4. Ако је површина најмањег квадрата 4cm^2, онда је његова страница 2cm (**3 бода**). Странице квадрата 3 је два пута већа од странице квадарата 1 и она је 4cm (**4 бода**). Страница квадрата 4 једнака је збиру дужина страница квадрата 3 и 2 и она је 6cm (**4 бода**).Страница квадрата 5 једнака је збиру страница квадрата 1, 2 и 4 и она је 10cm (**4 бода**). Дакле, ширина правоугаоника једнака је страници квадрата 5, а дужина је једнака збиру дужина страница квадрата 4 и 5, а то је 16cm (**3 бода**). Обим правоугаоника је 52cm (**2 бода**).

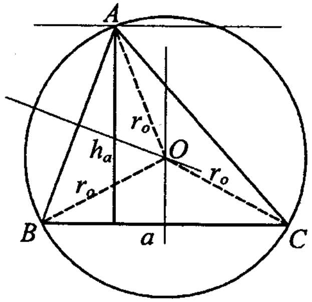
5. (**МЛ, XLI-4**) Нека је a = 5cm и b = 10cm. Како је збир свих ивица $4\cdot(a+b+c)$, имамо да је $4\cdot(a+b+c)=140$. Одавде добијамо да је c = 20cm (**15 бодова**). Како је $P=2\cdot(ab+bc+ac)$, то је $P=700\text{cm}^2$ (**5 бодова**).

OŠ Mrčajevci 2009.

РЕШЕЊА – VI РАЗРЕД

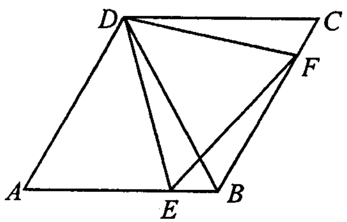
1. Растављања броја 2009 су $2009 = 49 \cdot 41 = 7 \cdot 287 = 1 \cdot 2009$. Како ни један од бројева 7 и 287 није квадрат неког целог броја, добијамо да је $x^2 = 49$ и $|y| = 41$ или $x^2 = 1$ и $|y| = 2009$ (**4 бода**). Дакле, сва решења су (**свако решење по 2 бода**):
$(x,y) \in \{(7,41),(7,-41),(-7,41),(-7,-41),(1,2009),(1,-2009),(-1,2009),(-1,-2009)\}$.

2. Нека је O центар описане кружнице. Троугао BCO је једнакокраки и познате су нам све његове странице па га можемо конструисати. Тачка A се налази на правој која је паралелна правој на којој је страница a и на растојању h_a од ње и налази се на удаљености r_o од тачке O. Теме A је одређено пресеком поменуте праве и кружнице (**За објашњење и конструкцију дати по 10 бодова. Не тражити доказ и дискусију**).



3. (**МЛ, XLI-5**) Ако је x мушкараца у браку, онда је и x жена у браку, па острву живи $\frac{4x}{3}$ мушкараца и $\frac{3x}{2}$ жена (**5 бодова**). Острво има укупно $\frac{17x}{6}$ становника (**5 бодова**). У браку је $2x$ становника, а $\frac{5x}{6}$ становника није (**5 бодова**), а то је $\frac{5}{17}$ становника (**5 бодова**).

4. Како је $\measuredangle BAD=60°$ и $AB=AD$ то је ΔADB једнакостраничан и $\measuredangle ADB=60°$ (**3 бода**). Аналогно је и $\measuredangle DBC=60°$ (**3 бода**). Сада је $\Delta ADE \cong \Delta BDF$ ($AD=BD$, $AE=BF$, $\measuredangle DAB=\measuredangle DBC$) па је $DE=DF$ и $\measuredangle ADE=\measuredangle BDF$ (**7 бодова**). Како је $DE=DF$ и $\measuredangle EDF=\measuredangle EDB+\measuredangle BDF=\measuredangle EDB+\measuredangle ADE=\measuredangle ADB=60°$, то је троугао DEF једнакостраничан (**7 бодова**).



5. Да би збир 3 броја био паран сва три морају бити парна или један паран, а два непарна. У сваком случају један од ова 3 броја је паран (**6 бодова**). Збир преостала 2 броја је непаран, а то је могуће само ако је 1 паран, а 1 непаран. Дакле, и од преостала 2 броја један је сигурно паран (**7 бодова**). Како су сада 2 броја сигурно парна, а сваки паран број је дељив са 2, то је производ ових 5 бројева дељив са 4 (**7 бодова**).

РЕШЕЊА – VIII РАЗРЕД

1. $A+AB+ABC+ABCD=1111A+111B+11C+D=2009$. Одавде је A=1 (**5 бодова**). Сада је $111B+11C+D=898$. Како је $11C+D\le 107$, то је $791\le 111B\le 898$ па је B=8 (**5 бодова**). Сада је $11C+D=10$. Одавде је једино могуће да је C=0 (**5 бодова**), али је тада D=10 (што је немогуће јер је D цифра) па дати ребус нема решење (**5 бодова**).
Напомена: Максимално бодовати и сваки други тачан начин решавања.

2. Основна ивица пирамиде је дијагонала стране коцке и једнака је $a\sqrt{2}$ (**4 бода**), а бочна ивица пирамиде је половина дијагонале коцке, тј. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (**4 бода**). Сада Питагорином теоремом добијамо да је висина коцке $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ (**6 бодова**). Дакле, $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{a^3}{12}$ (**6 бодова**).

3. Посматрајмо $\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a+b+c\right)=\left(a^3-a\right)+\left(b^3-b\right)+\left(c^3-c\right)$. Сваки од сабирака можемо записати у облику, на пример, $a^3-a=(a-1)a(a+1)$ (**5 бодова**). Производ три узастопна природна броја је увек дељив са 6 (**5 бодова**), па је и збир три сабирка на десној страни једнакости дељив са 6 (**5 бодова**). Доказали смо да је разлика дељива са 6, а како је умањилац, по претпоставци, дељив са 6, то је и умањеник $a^3+b^3+c^3$ дељив са 6 (**5 бодова**), што је и требало доказати.

4. (**МЛ, XLII-6**) Једна цифра мора бити 5, а производ друге две мора бити дељив са 4 (**4 бода**). Могућа су три случаја: а) Ако су две цифре парне, онда таквих бројева има $3\cdot 4\cdot 4$ (цифру 5 можемо распоредити на 3 начина, а на свако од преостала два места можемо записати било коју од цифара 2, 4, 6, 8) (**6 бодова**); б) Ако је једна од преостале две цифре дељива са 4, а друга непарна различита од 5, онда таквих бројева има $6\cdot 2\cdot 4$ (**6 бодова**). в) Ако је једна цифра 5, а друга дељива са 4 таквих има $3\cdot 2$ (**4 бода**). Дакле, тражених бројева има 102.

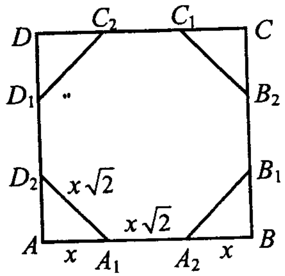
5. Како је $P_{\Delta ABD}=P_{\Delta ABM}=P_{\Delta BCD}$ (**5 бодова**) и
$$P_{\Delta APD}=P_{\Delta ABD}-P_{\Delta ABP}=P_{\Delta ABM}-P_{\Delta ABP}=P_{\Delta BMP}\ \textbf{(5 бодова)}$$
онда је
$$P_{\Delta ABP}=P_{\Delta ABD}-P_{\Delta APD}=P_{\Delta BCD}-P_{\Delta BMP}=P_{\Delta MDP}+P_{\Delta BCM}\ \textbf{(10 бодова)}.$$

РЕШЕЊА – VII РАЗРЕД

1. $4^9+6^{10}+3^{20}=\left(2^2\right)^9+2^{10}\cdot 3^{10}+\left(3^{10}\right)^2=\left(2^9\right)^2+2\cdot 2^9\cdot 3^{10}+\left(3^{10}\right)^2=\left(2^9+3^{10}\right)^2$
(**20 бодова**)

2. (**МЛ, XLIII-4**) Обим правоуглог троугла је O=a+b+c=36cm. Како је $\frac{a+b}{c}=\frac{7}{5}$, то додавењем броја 1 левој и десној страни добијамо $\frac{a+b+c}{c}=\frac{12}{5}$ (**5 бодова**). Заменом a+b+c=36 у $\frac{a+b+c}{c}=\frac{12}{5}$ добијамо $\frac{36}{c}=\frac{12}{5}$, одакле је c=15 (**5 бодова**). Сада из $\frac{a+b}{c}=\frac{7}{5}$ закључујемо да је a+b=21 (**5 бодова**), а $a^2+2ab+b^2=441$. На основу Питагорине теореме је a^2+b^2=225, па заменом у $a^2+2ab+b^2=441$ добијамо ab=108. Како је $P=\frac{ab}{2}$ то је тражена површина 54cm^2 (**5 бодова**).

3. За n=1 је m=58, за n=2 је m=59, за n=3 је m=63, па n није 1, 2 или 3. За n=4 је m=81=9^2 (**12 бодова**). Како за n>4 цифра јединица броја m је 7, само број 4 испуњава услове задатка (**8 бодова**).



4. Троуглови које смо одсекли су једнакокрако правоугли (**3 бода**). Претпоставимо да је катета тог троугла x. Питагорином теоремом добијамо да је страница осмоугла $x\sqrt{2}$ (**3 бода**). Како је страница a квадрата састављена од две катете троугла и једне странице осмоугла, то је $a=2x+x\sqrt{2}$. Сада је
$$x=\frac{10}{2+\sqrt{2}}=5\left(2-\sqrt{2}\right)\text{cm}\ \textbf{(5 бодова)}.$$
Површину осмоугла добијамо када од површине квадрата одузмемо површине троуглова које смо одрезали, па је
$$P=P_k-4\cdot P_\Delta=100-4\cdot\frac{25\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{2}=200\left(\sqrt{2}-1\right)\text{cm}^2\ \textbf{(9 бодова)}.$$

5. Једна цифра је 5, а друга мора бити дељива са 3 (3, 6, 9) (**5 бодова**).
1) Ако је једна цифра 5, друга дељива са 3, а трећа није дељива ни са 3 ни са 5, укупан број могућности је $6\cdot 3\cdot 5=90$ (3 цифре на 3 позиције можемо распоредити на 6 начина, 3 цифре су дељиве са 3 и 5 цифара није дељиво ни са 3 ни са 5) (**5 бодова**).
2) Ако је једна цифра 5, а свака од две преостале цифре је дељива са 3, укупан број могућности је $3\cdot 3\cdot 3=27$ (цифру 5 можемо распоредити на 3 начина и за сваку од преостале 3 цифре имамо 3 могућности) (**5 бодова**).
3) Ако су 2 цифре 5, а трећа дељива са 3 укупан број могућности је $3\cdot 3=9$ (цифру дељиву са 3 можемо распоредити и одабрати на по 3 начина). Дакле укупан број могућности је 126 (**5 бодова**).