Општинско такмичење из математике

# КОМПЛЕТ
# ТЕСТОВА СА РЕШЕЊИМА

**(од 3. до 8. разреда)**

**28. фебруар 2015.**

**III РАЗРЕД**

**Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.**
**Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.**

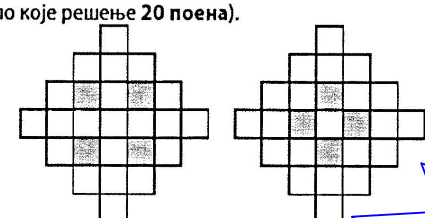
**1.** (**МЛ 48/5**) Тражени бројеви су: 599, 689, 698, 869, 779, 797, 788, 878, 887 (**по 2 поена** за сваки тачно написани број, а за свих 9 тачних бројева **20 поена**).

**2.** Постоје 4 решења: $202 \cdot 4 + 1 = 809$, $220 \cdot 4 + 1 = 881$, $402 \cdot 2 + 1 = 805$, $420 \cdot 2 + 1 = 841$ (Свако решење **по 5 поена.** За свако нетачно решење −3 поена. Укупан број поена у задатку не може бити негативан.)

**3.** I решење: Ако је број моје куће са једне стране 37, моја кућа је деветнаеста у улици (**7 поена**). Гледано са друге стране, моја кућа је тридесет трећа (**7 поена**). Дакле у мојој улици има $19 + 33 - 1 = 51$ кућа (**6 поена**).
II решење: Ако је број моје куће 37, до моје куће има осамнаест кућа (**7 поена**). Гледано са другог краја, до моје куће има тридесет две куће (**7 поена**). Дакле у мојој улици има укупно $18 + 32 + 1 = 51$ кућа (**6 поена**).

**4.** Месец може имати 28, 29 (ако је преступна година), 30 и 31 дан. Ако је први дан у месецу петак, тада последњи дан може бити: четвртак, петак, субота или недеља (Свако решење **по 5 поена**. За свако нетачно решење −3 поена. Укупан број поена у задатку не може бити негативан.)

**5.** (**МЛ 48/5**) Задатак има више решења. Два решења дата су на слици (било које решење **20 поена**).




**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ**

**Општинско такмичење из математике ученика основних школа**
**28.02.2015 - III разред**

1. Запиши све троцифрене бројеве мање од 888 чији је збир цифара 23.

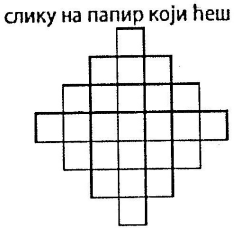
2. У свако празно поље треба уписати по једну од цифара 0, 1, 2, 2, 4. Како треба уписати цифре да би се након множења и сабирања добио непаран број девете стотине? Нађи сва решења.

$$\square\square\square \cdot \square + \square$$

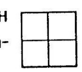
3. Куће у мојој улици су нумерисане непарним бројевима: 1, 3, 5, 7, ... Број моје куће је 37. Да су нумерисали куће почевши од другог краја улице број моје куће би био 65. Колико има кућа у мојој улици?

4. Први дан у неком месецу је петак. Који дан може бити последњи у том месецу?

5. Прецртај следећу слику на папир који ћеш предати.



Осенчи нека 4 мала квадрата тако да не остане ниједан квадрат који је састављен од четири мала неосенчена квадрата, као на слици десно.



Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

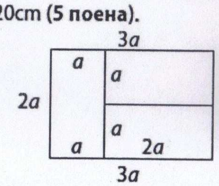
## IV РАЗРЕД

**Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.**
**Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.**

1. Сваки тачно уписан број **по 2 поена**.

| · | 5 | 9 | 4 |
|---|---|---|---|
| 7 | 35 | 63 | 28 |
| 11 | 55 | 99 | 44 |
| 101 | 505 | 909 | 404 |

2. **(МЛ 49/2)** Ако краћа страница малог правоугаоника има дужину $a$, онда ја дужа страница $2a$ (**5 поена**). Обим великог правоугаоника је $2a + 3a + 2a + 3a = 10a$ (**2 поена**). Дакле $10a = 200\text{cm}$ (**3 поена**), $a = 20\text{cm}$ (**5 поена**), па је обим једног малог правоугаоника: $a + 2a + a + 2a = 6a = 6 \cdot 20\text{cm} = 120\text{cm}$ (**5 поена**).




3. **(МЛ 49/2)** Како сабирамо четвороцифрени и двоцифрени број, а као збир добијамо петоцифрени број, одмах се види да је $A = 9$, $C = 1$ и $D = 0$. Имамо да је $99BB + B9 = 100EE$ и $4 < B < 9$. Провером видимо да је $B = 8$ и $E = 7$ (Свака тачно одређена цифра **по 4 поена**).

4. **(МЛ 47/2)** Како укупно има течности за 10 пуних чаша и једну до пола напуњену, то значи да свако треба да добије укупно течности за 3 пуне чаше и једну до пола пуну (**10 поена**). Једна подела може бити: двојица добију по три пуне, једну до пола пуну и три празне чаше, а трећи по једну пуну и празну чашу и пет до пола пуних чаша. Друга подела може бити: двојица добију по две пуне чаше, три до пола пуне и две празне чаше, а трећи по три пуне и празне и једну до пола пуну чашу (Било који тачан одговор **10 поена**).

5. Највећи четвороцифрени број који се може добити спајањем картона је 9901 (**8 поена**), а најмањи 1006 (**8 поена**). Тражена разлика је $9901 - 1006 = 8895$ (**4 поена**).

Школа-домаћин
ОШ "Љупче Николић"
Алексинац

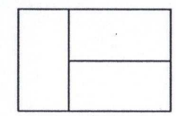
**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ**

**Општинско такмичење из математике ученика основних школа**
**28.02.2015.**
**IV РАЗРЕД**

1. У табели је било записано укупно 15 природних бројева (као чиниоци или производи). Учитељица је избрисала 10 бројева и рекла ученицима да поново тачно запишу избрисане бројеве. Прецртај табелу на папир који ћеш предати и упиши бројеве које је учитељица избрисала.

| · | | | |
|---|---|---|---|
| | 35 | 63 | |
| | | 99 | 44 |
| | | | 404 |

2. Три мања једнака правоугаоника сложена су (као на цртежу) тако да граде нови правоугаоник. Ако је обим великог правоугаоника 200cm, колики је обим једног малог правоугаоника?



3. Дешифруј сабирање:

$$AABB + BA = CDDEE.$$

Различита слова представљају различите цифре.

4. Три пријатеља желе да поделе 7 пуних, 7 напуњених до половине и 7 празних чаша лимунаде тако да сваки добије исту количину лимунаде и исти број чаша. Како то могу да ураде а да се не врши пресипање из чаше у чашу?

5. На картонима су записани бројеви као на слици.


Спајањем два или три картона могу да се добију, на пример, следећи четвороцифрени бројеви: 9042, 1429, 6006, ... Која је највећа разлика два четвороцифрена броја која могу настати спајањем по два или три картона?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ**

**Општинско такмичење из математике ученика основних школа**
**28.02.2015.**

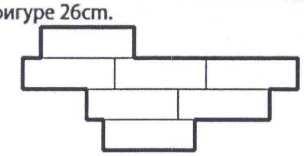
## V РАЗРЕД

1. Одреди све парове цифара $x$ и $y$ тако да важи $\frac{x}{5}-\frac{2}{y}=\frac{4}{5}$.

2. Броју 2014 допиши са леве и са десне стране по једну цифру тако да добијени шестоцифрени број буде дељив са 36.

3. Половина угла $\alpha$ је за $2015'$ мања од угла суплементног углу $\alpha$. За колико је угао $\alpha$ мањи од $100°$?

4. Фигура на слици се састоји од 7 једнаких правоугаоника. Дужине страница правоугаоника су изражене природним бројем центиметара. Израчунај површину једног правоугаоника ако је обим читаве фигуре 26cm.



5. Зец Васа воли да једе купус и шаргарепу. Током једног дана он поједе или 9 шаргарепа или 2 купуса или 1 купус и 4 шаргарепе. Међутим, неког дана једе само траву. Током последњих 10 дана Васа је појео укупно 30 шаргарепа и 9 купуса. Колико је од ових 10 дана јео само траву?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Школа-домаћин
ОШ "Љупче Николић"
Алексинац

## V РАЗРЕД

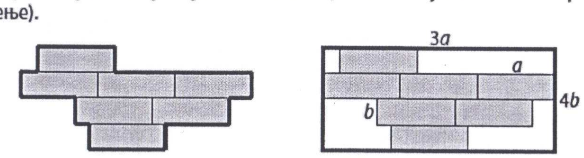
| **Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.** |
|---|

**1.** $\frac{x}{5}-\frac{2}{y}=\frac{4}{5}$, $\frac{xy-10}{5y}=\frac{4y}{5y}$, па је $xy - 10 = 4y$, тј. $xy - 4y = 10$. Сада је $x(y - 4) = 10$ (**6 поена**). Како су $x$ и $y$ цифре, то је $x = 2$, $y - 4 = 5$ или $x = 5$, $y - 4 = 2$. Одавде су решења $x = 2$, $y = 9$ (**7 поена**) и $x = 5$, $y = 6$ (**7 поена**).

**2.** (МЛ 48/2) Да би тражени број $\overline{a2014b}$ био дељив са 36, мора бити дељив са 4 и 9 (**2 поена**). Ако је дељив са 4, тада је $b\in\{0, 4, 8\}$ (**3 поена**). Ако је број дељив са 9 збир цифара мора бити дељив са 9, па имамо: за $b = 0$ је $a + 7$ дељиво са 9, тј. $a = 2$; за $b = 4$ је $a + 11$ дељиво са 9, тј. $a = 7$; за $b = 8$ је $a + 15$ дељиво са 9, тј. $a = 3$. Дакле, тражени бројеви су: 220140, 720144, 320148 (Свако решење **по 5 поена**. За свако нетачно решење –3 поена. Укупан број поена у задатку не може бити негативан.).

**3.** Означимо половину угла $\alpha$ са $x$. Тада важи $x + 2015' = 180° - 2x$ (**5 поена**). Сада је $3x = 180° - 2015' = 146°\,25'$ и $x = 48°\,48'\,20''$ (**7 поена**). Дакле, имамо да је $\alpha = 2x = 97°\,36'\,40''$ (**4 поена**), а овај угао је за $2°\,23'\,20''$ мањи од $100°$ (**4 поена**).

**4.** Означимо дужу страницу правоугаоника са $a$, а краћу са $b$. Обим фигуре са слике једнак је обиму правоугаоника са слике десно, па је $6a + 8b = 26$cm (**10 поена**). Како су дужине страница природни бројеви, то $b$ може бити 1cm, 2cm или 3cm. Провером добијамо да је $b = 1$cm, $a = 3$cm, па је површина једног правоугаоника 3cm$^2$ (**10 поена** уз обавезно образложење).




**5.** (МЛ 48/5) Како је појео непаран број купуса, морао је да једе по 1 купус 1, 3, 5 или 7 дана (**2 поена**). Када једе један купус једе и 4 шаргарепе па је тих дана морао да поједе и 4, 12, 20 или 28 шаргарепа, тј. преостало му је да поједе 26, 18, 10 или 2 шаргарепе (**8 поена**). Како преостали број мора бити дељив са 9, закључујемо да је зец Васа јео 3 дана 1 купус и 4 шаргарепе, 3 дана по 2 купуса, 2 дана по 9 шаргарепа и преостала 2 дана траву (**10 поена**).

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ**

**Општинско такмичење из математике**
**ученика основних школа**
**28.02.2015.**

## VI РАЗРЕД

1. На писменом задатку из математике требало је да се израчуна вредност следећег израза:
$$\frac{13}{31}-\frac{31}{13}+\frac{389}{403}-31{,}13+13{,}31.$$
Трећина ученика је добила резултат –18,82; две седмине ученика је добило резултат –45,44, а преосталих 8 ученика није решавало задатак. Колико ученика је тачно урадило задатак?

2. У троуглу $ABC$ је $\measuredangle ACB = 90°$. Ако симетрала хипотенузе и тежишна линија $CC_1$ заклапају угао од 50°, израчунај углове троугла $ABC$.

3. Докажи да не постоје цифре $a, b, c, d$ и $e$, такве да је
$$\overline{abcd},e\cdot e=\overline{cadeb}.$$

4. Бака има 10 унучади и сви имају различит број година. Алиса је најстарија. Ако је збир година свих унучади 180, колико најмање Алиса може имати година?

5. Докажи да је центар уписаног круга троугла најближи оном темену тог троугла које је уједно теме његовог највећег угла.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

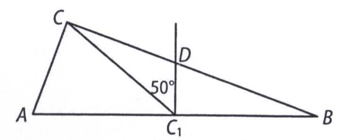
Школа-домаћин
ОШ "Љупче Николић"
Алексинац

## VI РАЗРЕД

**Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.**

**1.** Вредност датог израза је –18,82 (**9 поена**). Из услова задатка видимо да $1-\frac{1}{3}-\frac{2}{7}=\frac{8}{21}$ ученика није решавало задатак. Ако је број ученика у одељењу $x$ имамо да је $\frac{8}{21}x=8$, па у одељењу има 21 ученик (**9 поена**). Дакле задатак је тачно урадило 21 : 3 = 7 ученика (**2 поена**).

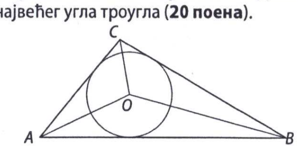
**2.** $\measuredangle AC_1D = 90°$, па је $\measuredangle AC_1C = 40°$ (**5 поена**). Троуглови $ACC_1$ и $BCC_1$ су једнакокраки, па је $\measuredangle C_1AC = \measuredangle C_1CA = 70°$, $\measuredangle C_1BC = \measuredangle C_1CB = 20°$. Дакле, углови троугла су 90°, 70° и 20° (**15 поена**).




**3.** Како је $\overline{abcd},e=\overline{abcd}+\frac{1}{10}e$, то је $\left(\overline{abcd}+\frac{1}{10}e\right)\cdot e=\overline{cadeb}$ (**3 поена**), $\frac{1}{10}e\cdot e=\overline{cadeb}-\overline{abcd}\cdot e$ (**3 поена**). Разлика на десној страни последње једнакости је природан број, па и лева страна мора бити природан број (**6 поена**), а то је могуће само за $e = 10$ (**4 поена**). Како су $a, b, c, d$ и $e$ цифре, закључујемо да тражене цифре не постоје (**4 поена**).

**4.** (**МЛ 48/5**) Да би Алиса имала најмање година, сви остали морају имати максималан могући број година. Ако Алиса има $n$ година, остали највише могу да имају $n-1, n-2, ..., n-9$ година. Тада важи да је $10n-45=180$, одакле је $n = 22{,}5$, па закључујемо да Алиса најмање може имати 23 године (**20 поена**).

**5.** (**МЛ 48/4**) Нека је $ABC$ дати троугао и нека је $\gamma \geq \alpha \geq \beta$ (слика). Тачка $O$ је центар уписаног круга и праве $AO$, $BO$ и $CO$ су редом симетрале углова $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$. Растојања центра $O$ од темена троугла су $OA$, $OB$ и $OC$, па треба да докажемо да је $OC \leq OA$ и $OC \leq OB$. У троуглу $BCO$ за углове $BCO$ и $CBO$ важи да је $\measuredangle BCO \geq \measuredangle CBO$, па следи да је $OC \leq OB$. У троуглу $AOC$ је $\measuredangle ACO \geq \measuredangle CAO$ па је $OC \leq OA$. Дакле, центар уписаног круга је најближи темену највећег угла троугла (**20 поена**).



**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ**

## Општинско такмичење из математике ученика основних школа 28.02.2015.

## VII РАЗРЕД

1. Израчунај

$$\sqrt{(x-\sqrt{5})^2}-\sqrt{(7-x)^2}-(x-\sqrt{5})\cdot(7-x)$$

за $x=7+\sqrt{5}$.

2. Када се три последње цифре шестоцифреног броја $a$ преместе на почетак, у истом поретку, добије се 6 пута већи број. Одреди број $a$.

3. Средња линија трапеза дели површину трапеза у односу $7:5$. Израчунај однос дужина основица тог трапеза.

4. Одреди површину троугла $ABC$ ако су његова тежишна линија $BM$ и симетрала угла $AL$ ($L \in BC$) узајамно нормалне и при томе је $AL=k$ и $BM=m$.

5. Одреди вредности природних бројева $x$ и $y$ тако да је

$$2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot \ldots \cdot 2^7=x^y.$$

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Школа-домаћин
ОШ "Љупче Николић"
Алексинац

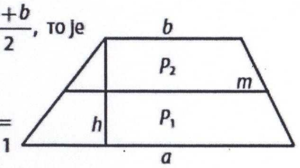
## VII РАЗРЕД

**Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.**

**1.** (МЛ 49/1) $7+6\sqrt{5}$ (20 поена).

**2.** Треба уствари решити ребус $ABCDEF\cdot 6=DEFABC$. Означимо број $ABC$ са $x$, а број $DEF$ са $y$. Тада је $6\cdot(1000x+y)=1000y+x$, тј. $6000x+6y=1000y+x$, где су $x$ и $y$ бројеви са највише 3 цифре (**5 поена**). Даље је $5999x=994y$ (**2 поена**), $857x=124y$ (**5 поена**). Како су 857 и 142 узајамно прости бројеви, једино решење је $x=142$ и $y=857$. Тражени број је 142857 (**8 поена** уз обавезно образложење).

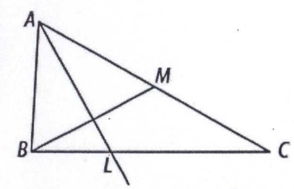
**3.** (МЛ 47/5) Како је $P_1:P_2=7:5$ и $m=\dfrac{a+b}{2}$, то је




$$\left(\frac{a+m}{2}\cdot\frac{h}{2}\right):\left(\frac{m+b}{2}\cdot\frac{h}{2}\right)=7:5 \text{ (5 поена).}$$

Сређивањем добијамо $(3a+b):(a+3b)=7:5$ (**8 поена**), одакле је $a:b=2:1$ (**7 поена**).

**4.** У троуглу $ABM$ је симетрала угла код $A$ нормална на наспрамну страницу, па је тај троугао једнакокрак, $AB=AM$ $(=MC)$ (**4 поена**). Четвороугао $ABLM$ је са нормалним дијагоналама, па је његова површина $P_{ABLM}=\dfrac{1}{2}km$ (**4 поена**).




Троугао $ABL$ је подударан троуглу $AML$ (СУС), па је $P_{ABL}=P_{AML}=\dfrac{1}{4}km$ (**4 поена**). С обзиром да је $AM=MC$ то је $P_{AML}=P_{CML}$ (**4 поена**) и $P_{ABC}=\dfrac{3}{4}km$ (**4 поена**).

**5.** (МЛ 49/2) $2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot\ldots\cdot 2^7=2^{1+2+\ldots+7}=2^{28}$ (**8 поена**). Како је $28=1\cdot 28=2\cdot 14=4\cdot 7$, то су тражена решења дата у табели (Свако решење **по 2 поена**. За свако нетачно решење –1 поен. Укупан број поена у задатку не може бити негативан.).

| $x$ | $2$ | $2^2$ | $2^4$ | $2^7$ | $2^{14}$ | $2^{28}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 28 | 14 | 7 | 4 | 2 | 1 |

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ**

## Општинско такмичење из математике ученика основних школа 28.02.2015 - VIII РАЗРЕД

**1.** Порција воћне салате садржи $\frac{3}{4}$ воћа, а остатак је шлаг. Ако би јој се додало још 40 грама шлага, у порцији би било два пута више воћа него шлага.
а) Колико грама воћне салате има у једној порцији?
б) Колико грама воћа садржи 5 порција ове воћне салате?

**2.** Двојица шахиста одиграли су меч од неколико партија у коме су се за победу добијала 4 поена, за реми 2 поена и за пораз 1 поен. При томе су обојица укупно скупили 170 поена. Да ли је победник могао имати тачно 90 поена?

**3.** Правилна шестострана призма пресечена је са равни. Раван садржи две паралелне основне ивице које су на различитим основама и не припадају истој бочној страни. Површина добијеног пресека је $6\sqrt{7}\ \mathrm{cm}^2$. Израчунај запремину призме ако је висина призме два пута дужа од основне ивице.

**4.** Дата је табела $100 \times 100$ у коју су, редом, уписани сви бројеви од 1 до 10000 (у прву врсту редом бројеви од 1 до 100, у другу од 101 до 200, ...). Докажи да је за сваки квадрат $7 \times 7$, који можемо уочити у табели, збир свих бројева у њему дељив са 49.

**5.** Правилан 2014-угао и правилан 2015-угао имају једнаке дужине страница. Посматрају се кружни прстен одређен уписаним и описаним кружницом 2014-угла и кружни прстен одређен уписаним и описаним кружницом 2015-угла. Који од та два кружна прстена има већу површину?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

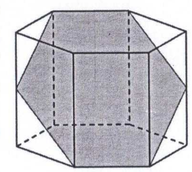
Школа-домаћин
ОШ "Љупче Николић"
Алексинац

## VIII РАЗРЕД

**Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.**
**Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.**

**1.** (**МЛ 47/5**) а) Ако са $x$ означимо масу порције, тада је $\frac{3}{4}x = 2\cdot\left(\frac{1}{4}x + 40\mathrm{g}\right)$ (**7 поена**), одакле је $x = 320\mathrm{g}$ (**7 поена**). б) 1200g (**6 поена**).

**2.** Ако победник има 90 поена, онда поражени има 80 поена, тј. разлика у поенима је 10. Како се за реми добија једнак број поена, разлика међу играчима се не мења, док се у случају победе једног играча разлика међу њима мења за 3 сваки пут, па и укупна разлика мора бити дељива са 3. Како $3 \nmid 10$, то победник није могао имати тачно 90 поена (**20 поена**).



**3.** Нека је основна ивица дужине $a$. Дати пресек је шестоугао састављен од два подударна једнакокрака трапеза. Основице једног трапеза су дужина $2a$, $a$, а краци $a\sqrt{2}$ (**6 поена**). Површина једног трапеза је $\frac{3}{4}a^2\sqrt{7}$ (**6 поена**), а површина пресека $\frac{3}{2}a^2\sqrt{7}$. Основна ивица призме је онда 2cm (**4 поена**), а висина 4cm. Запремина призме је $24\sqrt{3}\mathrm{cm}^3$ (**4 поена**).

**4.** Уочимо произвољну табелу $7 \times 7$ и нека је $x$ број у њеном центру. Тада је збир бројева у његовој врсти $(x - 3) + \ldots + x + \ldots + (x + 3) = 7x$ (**5 поена**). Како су сви бројеви у наредној врсти за по 100 већи, то је њихов збир $7x + 700$. На исти начин добијамо да су збирови у датих 7 врста: $7x - 2100$, $7x - 1400$, $7x - 700$, $7x$, $7x + 700$, $7x + 1400$, $7x + 2100$ (**5 поена**), па је укупан збир $7 \cdot 7x = 49x$ и дељив је са 49 (**10 поена**).

**5.** (**МЛ 49/1**) Нека је $a$ дужина странице правилног 2014-угла и правилног 2015-угла. И у једном и у другом случају страница многоугла је тетива описане кружнице која додирује уписану кружницу. Ако су $r_{2014}$, $r_{2015}$, $R_{2014}$ и $R_{2015}$ полупречници уписане и описане кружнице 2014-угла и 2015-угла, редом, тада је $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = R_{2014}^2 - r_{2014}^2 = R_{2015}^2 - r_{2015}^2$ (**15 поена**), па је површина кружног прстена $R_{2014}^2\pi - r_{2014}^2\pi = \pi(R_{2014}^2 - r_{2014}^2) = \frac{a^2}{4}\pi = \pi(R_{2015}^2 - r_{2015}^2) = R_{2015}^2\pi - r_{2015}^2\pi$. Дакле, оба прстена имају једнаке површине (**5 поена**).